Елементарна математика

Други домаћи задатак 2017/18

1. Ако су a, b и c дужине страница троугла обима 1, доказати да је
$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

2. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати да тада важи:
$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3.$$

3. Доказати да за реалне бројеве $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$ важи неједнакост:
$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right).$$

4. Ако су a, b и c дужине страница троугла, доказати да је
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

5. Ако су a, b и c дужине страница троугла, а s полуобим доказати да је
$$\frac{2s}{abc} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

6. Ако су a, b и c дужине страница троугла, а s полуобим доказати да је
$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leqslant s.$$

7. Ако су a, b и c дужине страница троугла, а s полуобим доказати да је
$$(s-a)(s-b) + (s-b)(s-c) + (s-c)(s-a) \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{4}.$$

8. Ако су h_a, h_b и h_c висине троугла, а r полупречник уписане кружнице, доказати да је
$$h_a \cdot h_b \cdot h_c \geqslant 27r^3.$$

9. Доказати да је у правоуглом троуглу, чија је хипотенуза дужине c, збир катета мањи од $c\sqrt{2}$.

10. Доказати да је збир хипотенузе и висине над хипотенузом већи од збира катета.

11. Ако су a, b и c дужине страница троугла, доказати да је
$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

12. Нека су a, b и c дужине страница троугла, а x, y и z реални бројеви такви да је $x+y+z=0$. Доказати да је тада:
$$a^2yz + b^2zx + c^2xy \leq 0.$$

13. Нека су a, b и c дужине страница троугла, P површина и s полубим. Доказати да тада важи неједнакост:

$$3^{500}\left(a^{2001}+b^{2001}+c^{2001}\right) \geq 2^{2001} P^{1000} s.$$

14. Нека су a, b и c дужине страница троугла и s полубим. Доказати да тада важи неједнакост:

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

15. Нека су a, b и c дужине страница троугла. Доказати:

    1) збир квадрата страница троугла мањи је од површине квадра чије су странице једнаке страницама тог троугла;
    2) $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) > 2(a^3+b^3+c^3)$.

16. Нека су a, b и c дужине страница троугла. Доказати да је

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

У скупу реалних бројева решити једначину

17. $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}, (x \neq 0)$.

18. $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{1}{4}$.

19. $\frac{(x-b)\sqrt{(a-x)}-(x-a)\sqrt{(b-x)}}{\sqrt{(a-x)}-\sqrt{(b-x)}}=x$.

20. $\frac{\sqrt{(a+x)}-\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a+x)}+\sqrt{(a-x)}}=\frac{x}{a}$.

21. $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$.

22. $3^{\frac{x-1}{2}}-2^{\frac{x+1}{3}}=2^{\frac{x-2}{3}}+3^{\frac{x-3}{2}}$.

23. $3^{x^2(x^2-1)}=729\cdot 7^{x^4-x^2-6}$.

24. $\sqrt{3\cdot 2^{\log_{10}2x}+1}+\sqrt{2\cdot 2^{\log_{10}2x}+9}=\sqrt{13\cdot 2^{\log_{10}2x}-4}$.

25. $\log_{2011}(2010x)=\log_{2010}(2011x)$.

26. $\left(1+\frac{1}{2x}\right)\log 3+\log 2=\log(27-3^{\frac{1}{x}})$.

27. $2\log_4^2|x+1|+\log_4|x^2-1|+\log_{\frac{1}{4}}|x-1|=0$.

28. $\log x-(\log\sqrt[6]{x})^{-1}=1$.

29. $5^{2(\log_5 2+x)}-2=5^{x+\log_5 2}$.

30. $x^{\log_4 x-2}=2^{3(\log_4 x-1)}$.

31. $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2$.

32. $\log_x a+\log_a x=\log_{\sqrt{x}} a+\log_a \sqrt{x}+\dfrac{1}{2}$, $(a>0, a\neq 1)$.

33. $x^2\cdot\log_3 x^2-(2x^2+3)\cdot\log_9(2x+3)=3\cdot\log_3\dfrac{x}{2x+3}$.

34. $\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^x}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^x}=4$.

35. $\log_3\dfrac{1}{\sqrt{\log_3 x}}=\log_9\,\log_9\dfrac{x}{3}$.

36. $x^{\log x}=\dfrac{x^3}{100}$.

37. $\log_4\left(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_3 x))\right)=0,5$

38. $5^{1+\log_4 x}+5^{-1+\log_{\frac{1}{4}} x}=\dfrac{26}{5}$.

39. $\log_7 x+\log_7 x^2+\log_7 x^3+\cdots+\log_7 x^{100}=5050$.

40. $\left(\log_3\frac{3}{x}\right)\cdot(\log_2 x)-\log_3\dfrac{x^3}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$.

41. $\sin 3|x|+\sqrt{3}\cos 3x=\sqrt{2}$.

42. $\cos x+\cos 2x+2\left(\cos\dfrac{3x}{2}\right)^2+\cos 4x=\dfrac{1}{2}$

43. $\log_{\cos x}\sin x=4\log_{\sin x}\cos x$.

44. $\sin x+\cos x=0$.

45. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$.

46. $\sqrt{\cos^2 x+\dfrac{1}{2}}+\sqrt{\sin^2 x+\dfrac{1}{2}}=2$.

47. $e^{\frac{\sin 2x}{\cos x}}+(e^2-1)e^{\sin x}-e^2=0$.

48. $\log_{\sin x}\cos x+\log_{\cos x}\sin x=2$.

49. $(\cos x)^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1$.

50. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$.

51. $(1+\cos 4x)\sin 4x=\cos^2 2x$.

52. $4\cos^2(2-6x)+16\cos^2(1-3x)=13$.

53. $3^{1+\sin x} + 2 \cdot 3^{2+\cos(90^\circ + x)} = 21.$

54. $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4}.$

55. $\sin(5x + \dfrac{\pi}{3}) - \sin(7x + \dfrac{\pi}{4}) = 0.$

56. $(\sin \frac{x}{3} + 2\cos x)\cos x + (2\sin x - \cos \frac{x}{3} - 1)\sin x = 0.$

57. $\cos^2(x \cdot \sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{1 + x + x^2}.$

У скупу реалних бројева решити неједначину

58. $\dfrac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} \leq 1.$

59. $\dfrac{4x^2}{1 - \sqrt{1 + 2x}} < 2x + 9.$

60. $\dfrac{|1 - x|}{1 - |x|} < \dfrac{1 + |x|}{|1 + x|}.$

61. $\sqrt{-x^2 + x + 6} + x - 1 > 0.$

62. $\sqrt{x^2 - 5x - 24} \geqslant x - 2.$

63. $\dfrac{1}{2^{2x} + 3} \geqslant \dfrac{1}{2^{x+2} - 1}.$

64. $2^{4x+2} \cdot 4^{-x^2} - 3 \cdot 2^{2+2x-x^2} + 8 \leqslant 0.$

65. $\sqrt{\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{2x}} + \sqrt{\left(5 - 2\sqrt{6}\right)^{2x}} \leqslant 98.$

66. $\log_2 x < 6 \log_x 2 + 1.$

67. $\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) \leqslant 2.$

68. $\log_{x-3}(x^2 - 4x + 3) < 0.$

69. $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} \geqslant 2.$

70. $\log(5^x + x - 20) > x - x \log 2.$

71. $\log_{x+3}(9 - x^2) - \dfrac{1}{16} \log_{x+3}^2 (x - 3)^2 \geq 2.$

72. $\operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg}^2 x)(1 - 3\operatorname{tg}^2 x) > 0.$

73. $\dfrac{3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 4^{2x}}{|-1 + 5^{x+1}| - 4} < 0.$

74. $9^{2x+2} \cdot 3^{x^2-1} - 10 \cdot 3^{\frac{1}{2}x^2+1} \cdot 9^x + 3 \leq 0.$

75. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}.$

76. $|2^{4x^2-1} - 5| \leq 3$.

77. $\log_{(2x+3)} x^2 < 1$.

78. $\log 10^{\log(x+16)} > 1 + \log x$.

79. $|x-1|^{\log_2(4-x)} > |x-1|^{\log_2(1+x)}$.

80. $\log_2 \dfrac{|x^2-2x|+4}{|x+2|+x^2} \leq 0$.

81. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{x^3+x^2+x-14} \cdot \log_{\frac{1}{4}}(-x^2+5x-6) < 0$.

82. $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x > 1 + \operatorname{tg} x$.

83. $4\cos^2 x + 2(\sqrt{3}-1)\cos x - \sqrt{3} \leq 0$.

84. $\sqrt{5 - 2\sin\dfrac{x}{6}} \geqslant 6\sin\dfrac{x}{6} - 1$.

Сваки студент ради по три задатака и то по следећем распореду:

1. 14/14 – 1. 17. 52.
2. 44/15 – 2. 18. 53.
3. 42/14 – 3. 19. 54.
4. 10/15 – 4. 20. 55.
5. 35/14 – 5. 21. 56.
6. 30/15 – 6. 22. 57.
7. 40/15 – 7. 23. 58.
8. 13/15 – 8. 24. 59.
9. 30/12 – 9. 25. 60.
10. 36/15 – 10. 26. 61.
11. 34/15 – 11. 27. 62.
12. 8/14 – 12. 28. 63.
13. 28/14 – 13. 29. 64.
14. 10/11 – 14. 30. 65.
15. 30/13 – 15. 31. 66.
16. 2/15 – 16. 32. 67.
17. 22/13 – 3. 33. 68.
18. 31/14 – 4. 34. 69.
19. 35/15 – 5. 35. 70.
20. 23/15 – 6. 36. 71.
21. 35/14 – 7. 37. 72.
22. 31/13 – 8. 38. 73.
23. 13/11 – 9. 39. 74.
24. 25/14 – 10. 40. 75.
25. 38/15 – 11. 41. 76.
26. 25/15 – 12. 42. 77.
27. 38/13 – 13. 43. 78.
28. 9/15 – 14. 44. 79.
29. 6/14 – 15. 45. 80.
30. 37/15 – 16. 46. 81.
31. 7/13 – 3. 47. 82.
32. 15/12 – 4. 48. 83.
33. 40/12 – 5. 49. 84.
34. 53/14 – 6. 50. 65.
35. 55/13 – 7. 51. 64.

36. 27/12 – 19. 21. 67.
37. 25/13 – 18. 22. 69.
38. 41/14 – 22. 23. 70.
39. 45/12 – 3. 31. 74.
40. 19/15 – 12. 34. 77.
41. 271/16 – 11. 35. 84.
42. 20/15 – 22. 36. 61.

Радове можете предати до **01.06.2018.**